(١) أوجد كلا من المشتقات التالية :

١. $\frac{ع}{ع س}$ ($س^{٥}$)

٢. $\frac{ع}{ع س}$ ($ص^{٥}$)

٣. $\frac{ع}{ع س}$ (٣ س – ٧)^{٥}

٤. $\frac{ع}{ع س}$ (٧ س)

٥. $\frac{ع}{ع س}$ (٥ ص)

٦. $\frac{ع}{ع س}$ (جا س)

٧. $\frac{ع}{ع س}$ (جتا س)

٨. $\frac{ع}{ع س}$ (ظا س)

٩. $\frac{ع}{ع س}$ [جا (٥ س + ٣)]

١٠. $\frac{ع}{ع س}$ (ظا ٧ س)

١١. $\frac{ع}{ع س}$ ($\frac{١}{س}$)

١٢. $\frac{ع}{ع س}$ ($\sqrt{س}$)

١٣. $\frac{ع}{ع س}$ ($\sqrt[٥]{٥ س^{٢} + ٣ س}$)

١٤. $\frac{ع}{ع س}$ ($س^{٢}$ + ٥ س ص + $ص^{٣}$)

١٥. $\frac{ع}{ع س}$ ($س^{٢}$ + ٣ س جا ٢ س)

.....

(٢) أوجد التكاملات التالية :

١. $\int$ ٧ . ع س

٢. $\int$ ٧ س . ع س

٣. $\int$ ص$^{/}$. ع س

٤. $\int$ ٧ ص$^{/}$. ع س

٥. $\int$ جا(٥ س – ٣) . ع س

٦. $\int$ (٥ س – ٣)^{٧} . ع س

٧. $\int$ قا^{٢} (٣ س – ٥) . ع س

٨. $\int \frac{ع س}{\sqrt[٥]{٢ س + ٩}}$

٩. $\int$ (جا ٢ س + جتا س) . ع س

١٠. $\int$ (جتا^{٢} س + جا س) . ع س

١١. $\int$ (جا س + جتا س)^{٢} . ع س

١٢. $\int$ $س^{١٠}$ ($\frac{٢}{س}$ + $\frac{٣}{س^{٢}}$)^{٥} . ع س

١٣. $\int \frac{س^{٢} + س - ٢}{س - ١}$. ع س

١٤. $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$. ع س

١٥. $\int$ (٣ س^{٢} − ٢) (٢ س + ٥) . ء س

١٦. $\int$ جا س جتا س . ء س

١٧. $\int \frac{\text{جتا}^{٢}\ س}{١ + \text{جا}\ س}$. ء س

١٨. $\int$ س $\sqrt[٣]{\frac{٦}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{٣}}}$. ء س

١٩. $\int$ جتا($\frac{س}{٢}$ + ٣) . ء س

٢٠. $\int$ (س + ١) (٢ س + ١)^{٩} . ء س

٢١. $\int \frac{٢ س + ٣}{(٢ س + ١)^{٣}}$. ء س

٢٢. $\int$ ٣س $\sqrt[٣]{٣ س + ١}$. ء س

٢٣. $\int \sqrt[٥]{٢٥ س^{٢} - ٣٠ س + ٩}$. ء س

٢٤. $\int \frac{س^{٢} - ٦ س}{(س - ٣)^{٤}}$. ء س

٢٥. $\int$ قا^{٢} ($\frac{س}{٢}$ - ٣) . ء س

٢٦. $\int$ س $\sqrt[٣]{٣ س - ١}$. ء س

٢٧. $\int$ قا^{٢} $\frac{ط}{٢}$. ء س

النهايات والاتصال وقابلية الاشتقاق

(٣) أوجد : $\lim_{س \to -١}$ د(س) للدالة د(س) = $\frac{س^{٢} + س}{|س + ١|}$

.....

(٤) دور ثان ٢٠٠٦ : ابحث وجود $\lim_{س \to ١}$ د(س)

للدالة د(س) = $\begin{cases} \frac{\text{جا}(س - ١)}{(س - ١)} & ، \ س > ١ \\ \text{ظا}\left(\frac{ط\ س}{٤}\right) & ، \ س < ١ \end{cases}$

.....

(٥) ابحث اتصال الدالة

د(س) = $\begin{cases} \frac{\sqrt{٣ س - ٢} - \sqrt{س + ٢}}{س - ٢} & ، \ س \neq ٢ \\ ٣ & ، \ س = ٢ \end{cases}$ عند س= ٢

.....

(٦) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٢ س^{٢} - ١ & ، \ س \leq ٢ \\ س + ٥ & ، \ س > ٢ \end{cases}$ ابحث اتصال الدالة عند س = ٢ وكذلك قابلية اشتقاقها عند س = ٢

.....

(٧) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س + ١ & ، \ س > ١ \\ ٣ - أ\ س^{٢} & ، \ س \leq ١ \end{cases}$ متصلة عند س = ١

أوجد قيمة أ ثم ابحث قابلية اشتقاقها عند س = ١

.....

(٨) إذا كانت الدالة د(س) = $\begin{cases} أ\,س + ب & ، \quad س \leq ٢ \\ س^{٢} & ، \quad س > ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فما قيمة كل من أ ، ب

.....

(٩) أوجد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ إذا كانت الدالة د(س) قابلة للاشتقاق مرتين حيث د(س) = $\begin{cases} أ\,س^{٢} + ب\,س + جـ & ، \quad س \leq ٠ \\ ٢\,س + ٥ & ، \quad س > ٠ \end{cases}$

المشتقات العليا والتطبيقات الهندسية

(١٠) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى $س^{٢} + ص^{٢} + ٢\,س - ٢\,ص - ٦ = ٠$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١ ، - ١)

.....

(١١) إذا كان $٢\,ص^{٣} = ٣\,س^{٢}$ اثبت أن

$$ص\frac{ء^{٢}ص}{ء\,س^{٢}} + ٢(\frac{ء\,ص}{ء\,س})^{٢} = \frac{١}{ص}$$

.....

(١٢) دور أول ٢٠٠٦ : إذا كانت $ص = س^{٢} + ٣س + ٢$ ،

$ع = ٣س^{٢} - ٥س + ٤$ أوجد قيمة $\frac{ء^{٢}ص}{ء\,ع^{٢}}$ عند س = ٢ [$-\frac{٤}{٤٩}$]

.....

(١٣) إذا كان $\frac{ء\,ع}{ء\,س} = ٢س - ٣$ ، $\frac{ء\,ص}{ء\,س} = س^{٢} + ١$ فأوجد

$\frac{ء^{٢}ع}{ء\,ص^{٢}}$ عند س = ١

.....

(١٤) أوجد معادلتي المماس والعمودي عليه للمنحنى ص = جا٢س - جتا٤س عند النقطة س = صفر

.....

(١٥) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $ص = س^{٣} - ٣\,س$ والتي عندها المماس للمنحنى // محور السينات

(١٦) إذا كان المستقيم ١٣ س - ص - ٧ = ٠ يمس المنحنى $ص = أ\,س^{٣} + ب\,س^{٢}$ عند النقطة (١ ، ٦) فما قيمة أ ، ب

.....

(١٧) أوجد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ حتى يكون لمنحنيي الدالتين $ص = أ\,س^{٣} + ب\,س$ ، $ص = جـ\,س^{٢} - س$ مماسا مشتركا عند النقطة (- ١، ٢) وأوجد معادلة المماس المشترك[$-\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٣}{٢}$ ، ١ ، ٣س + ص + ١=٠]

.....

(١٨) دور أول ٢٠٠٦ : إذا كان المماس للمنحنى $س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠$ يصنع مثلثا متساوي الساقين مع محوري الإحداثيات في الربع الأول فأوجد معادلة هذا المماس [س + ص = ١٠]

المعدلات الزمنية المرتبطة

(١٩) الاختبار الثالث: تتحرك نقطة على المنحنى $س\,ص = س + ص - ٥$ أوجد موقع النقطة في اللحظة التي يكون فيها معدل تغير احداثيها السيني بالنسبة للزمن يساوي معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن

.....

(٢٠) الاختبار الخامس : بدأت نقطة الحركة على المنحنى $س^{٢} + ص^{٢} + ٦س - ٢٥ = ٠$ من الموقع (٢ ، - ٣) وكانت السرعة الابتدائية للاحداثي السيني ٦سم/ث احسب السرعة الابتدائية للاحداثي الصادي

.....

(٢١) مثلث متساوى الساقين طول كل من ساقيه ٦سم ، وقياس الزاوية بينهما (س) فإذا تغيرت س بمعدل $(\frac{ط}{٩٠})^{٦}$ فى الدقيقة حيث ط = ٣,١٤ فأوجد معدل تغير مساحة المثلث عند س = ٣٠° (متروك للطالب) [ ]

.....

(٢٢) الاختبار الرابع

اسطوانة تتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها فإذا كان طول نصف قطرها نق يزداد بمعدل ٠,٢ سم/ث وارتفاعها ع يزداد بمعدل ٠,١سم/ث . أوجد معدل التغير في حجم الاسطوانة عندما نق = ٢سم ، ع = ٥سم .

.....

(٢٣) دور ثان ٢٠٠٦

أ ب ، أ جـ طريقان متعامدان ، تحركت سيارة على الطريق أ ب من أ بسرعة ٤٠ كم/س وبعد ١٠ دقائق تحركت سيارة أخرى على الطريق أ جـ من النقطة أ بسرعة ٦٠ كم/س أوجد معدل تباعدهما بعد مضي ٢٠ دقيقة من بدء تحرك السيارة الثانية [$\frac{ع ف}{ع ن} = ٥٠\sqrt{٢}$ كم/س]

.....

(٢٤) كرة جوفاء طولا نصفى قطريها الداخلى والخارجى فى أى لحظة نق١ ، نق٢ على الترتيب . فإذا كان طول نصف قطرها الداخلى يزداد بمعدل ١سم/ث ، أوجد معدل تغير طول نصف قطرها الخارجى بحيث يظل حجم مادة الكرة ثابتا ، وذلك عند اللحظة التى فيها نق١ = ٣سم ، نق٢ = ٩سم

(متروك للطالب) [ ]

.....

(٢٥) ** تتحرك نقطة على المنحنى ص = ٤س – ٢س^{٣} بحيث يتناقص احداثيها الصادى بمعدل ٥ وحدات / ث . أوجد معدل تغير ميل المنحنى عندما س = ٢ [- ٦ وحدات / ث]

.....

(٢٦) ** أ ب سلم طوله ١٠ أمتار يستند بطرفه أ على أرض أفقية وباحدى نقطه جـ على حافة حائط رأسى ارتفاعه ٦ أمتار فإذا انزلق الطرف السفلى مبتعدا عن الحائط بمعدل ١,٥متر/دقيقة أوجد معدل هبوط طرفه ب عندما يصل إلى حافة الحائط

القيم العظمى والقيم الصغرى ورسم الدوال

(٢٧) أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة ص = س^{٣} – ١٢ س في الفترة [- ١ ، ٤]

.....

(٢٨) عين فترات التزايد والتناقص ونقط القيم العظمى المحلية ونقط القيم الصغرى المحلية وفترات التحدب ونقط الانقلاب للدالة

د(س) = س^{٣} – ٣ س + ٢ ثم ارسم منحنى الدالة .

.....

(٢٩) الاختبار الأول: المنحنى ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س له نقطة انقلاب عند النقطة (٣ ، - ٩) أوجد :

أولا : قيمة كل من أ ، ب

ثانيا : موقع القيم العظمى والصغرى المحلية له

.....

(٣٠) الاختبار الثاني

إذا علم أن الدالة د(س) = أ س^{٢} + ب س + ٢ لها نقطة حرجة عند (١ ، ٤) أوجد قيمة كل من أ ، ب وحدد نوع النقطة

.....

(٣١) اختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) إذا كانت جـ نقطة حرجة للدالة د وكانت د$''$(جـ) > ٠ فإن (جـ ، د (جـ))

(أ) صغرى محلية (ب) عظمى محلية (جـ) انقلاب

(٢) الدالة د(س) = س (س – ٣)^{٢} محدبة لأسفل في الفترة

(أ)]٢ ، ∞ [(ب)]٣ ، ∞ [(جـ)]- ∞ ، ٢[

.....

(٣٢) الاختبار الثاني

وعاء اسطواني مفتوح من قاعدته العليا سعته ٨٠٠٠ط سم^{٣} أوجد أبعاده التي تجعل مساحته السطحية أقل مايمكن [نق = ٢٠سم ، ع = ٢٠سم]

.....

(٣٣) مايو٩٨ : متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومجموع أطوال جميع أحرفه ١٢٠سم . أوجد أبعاد متوازي المستطيلات التي تجعل حجمه أكبر مايمكن [١٠سم ، ١٠سم، ١٠سم]

.....

(٣٤) " أغسطس٩٨"
نافذة على هيئة مستطيل يعلوه مثلث متساوي الساقين تنطبق قاعدته على أحد بعدي المستطيل فإذا كان ارتفاع المثلث $\frac{٣}{٨}$ طول قاعدته ومحيط النافذة ١٢٠سم . أوجد بعدي المستطيل التي تجعل مساحة النافذة أكبر مايمكن . [٣٢سم ، ٢٤سم]

.....

(٣٥) الاختبار الثالث
إذا كانت المقاومة بثقل الكجم المؤثرة على قطار تحرك بسرعة ع كم/س تتعين بالعلاقة م = $\frac{١٠^{٥}}{ع}$ + ١٠ ع أوجد أصغر قيمة للمقاومة

.....

(٣٦) مستقيم معادلته ٣ س – ص + ٣ = ٠ ، النقطتان أ (٤ ، ٢) ، ب (- ١ ، - ٣) . أوجد احداثيي النقطة جـ الواقعة على المستقيم المعلوم بحيث يكون (جـ أ)^{٢} + (جـ ب)^{٢} قيمة صغرى [جـ (- ٠,٩ ، ٠,٣)]

التكـــــامل

(٣٧) الاختبار الخامس : منحنى يمر بنقطة الأصل وميل العمودي عند أي نقطة هو $\frac{-١}{٣ س^{٢} + ٢ س}$ أوجد معادلة المنحنى

.....

(٣٨) الاختبار الثاني : إذا علم أن $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ = س^{٢} – ١ عند أي نقطة من نقط المنحنى ص = د(س) أوجد معادلة المنحنى إذا علم أنه يمس المستقيم س + ١٢ص = جـ عند النقطة (١ ، ١)

.....

(٣٩) إذا كان $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}}$ = ٦س – ٦ عند أي نقطة على المنحنى ص = د(س) وكانت النقطة (- ١ ، ١٠) نقطة عظمى محلية أوجد معادلة المنحنى

.....

(٤٠) " مثال٦ محلول صـ١١١ـ" دور أول ٢٠٠٦
إذا كان ميل المماس للمنحنى يعطى بالعلاقة $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣س^{٢} – ٦س – ٩ وكان للمنحنى قيمة عظمى محلية قدرها ١٠ أوجد معادلة المنحنى وأوجد القيمة الصغرى المحلية إن وجدت .

.....

(٤١) مثال٥ محلو ل صـ١١٠ـ أوجد معادلة المنحنى ص = د (س)
إذا كان $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{٢ س - ٣}{٥ - ٢ ص}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

.....

(٤٢) أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{\sqrt{ص - ٣}}{\sqrt{س + ٢}}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٤)

.....

(٤٣) الاختبار الخامس
خزان فارغ سعته ٦متر مكعب يصب فيه الماء بمعدل (ن + ٢) م^{٣}/ دقيقة حيث ن الزمن أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان .

.....

(٤٤) دور ثان ٢٠٠٦ – الاختبار الثاني
إناء مملوء بسائل يتسرب من ثقب صغير بقاع الإناء ، فإذا كان حجم السائل في الإناء يتغير بمعدل (٠,٤ ن – ٤٠) سم^{٣}/ث حيث ن الزمن بالثانية وكان حجم الإناء بعد ٣٠ ثانية من بدء التسرب ٩٨٠ سم^{٣} أوجد سعة الإناء وبين بعد كم ثانية يصبح الإناء فارغا [٢٠٠٠سم^{٣} ، ١٠٠ثانية]

الحلول الكاملة للتمارين

(١)

١. $\frac{ع}{ع س}(س^{٥}) = ٥ س^{٤}$

٢. $\frac{ع}{ع س}(ص^{٥}) = ٥ص^{٤}\frac{ع ص}{ع س}$

٣. $\frac{ع}{ع س}(٣س-٧)^{٥} = ٥(٣س-٧)^{٤}\times ٣ = ١٥(٣س-٧)^{٤}$

٤. $\frac{ع}{ع س}(٧ س) = ٧$

٥. $\frac{ع}{ع س}(٥ ص) = ٥\frac{ع ص}{ع س}$

٦. $\frac{ع}{ع س}(جا س) = جتا س$

٧. $\frac{ع}{ع س}(جتا س) = -جا س$

٨. $\frac{ع}{ع س}(ظا س) = قا^{٢} س$

٩. $\frac{ع}{ع س}[جا(٥س+٣)] = ٥جتا(٥س+٣)$

١٠. $\frac{ع}{ع س}(ظا ٧ س) = ٧ قا^{٢} ٧س$

١١. $\frac{ع}{ع س}(\frac{١}{س}) = -\frac{١}{س^{٢}}$

١٢. $\frac{ع}{ع س}(\sqrt{س}) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

١٣. $\frac{ع}{ع س}(\sqrt{٥ س^{٢}+٣ س}) = \frac{١\times(١٠ س+٣)}{٢\sqrt{٥ س^{٢}+٣ س}}$

١٤. $\frac{ع}{ع س}(س^{٢}+٥ س ص+ص^{٣})$

$= ٢س + ٥س\times\frac{ع ص}{ع س} + ص\times٥ + ٣ص^{٢}\frac{ع ص}{ع س}$

$= ٢س + ٥س\frac{ع ص}{ع س} + ٥ص + ص^{٢}\frac{ع ص}{ع س}$

١٥. $\frac{ع}{ع س}(س^{٢}+٣ س جا ٢ س)$

$= ٢س + ٣س\times ٢جتا٢س + جا٢س\times٣$

$= ٢س + ٦س جتا٢س + ٣جا٢س$

.....

(٢)

١. $\int ٧ . ع س = ٧ س + ث$

٢. $\int ٧س . ع س = \frac{٧}{٢} س^{٢} + ث$

٣. $\int ص' . ع س = ص + ث$

٤. $\int ٧ ص' . ع س = ٧ ص + ث$

٥. $\int جا(٥ س-٣).ع س = -\frac{١}{٥} جتا(٥ س-٣)$

٦. $\int (٥ س-٣)^{٧} . ع س = \frac{(٥ س-٣)^{٨}}{٥\times٨}$

$= \frac{١}{٤٠}(٥س-٣)^{٨} + ث$

٧. $\int قا^{٢}(٣ س-٥).ع س = \frac{١}{٣} ظا(٣س-٥) + ث$

٨. $\int \frac{ع س}{\sqrt[٥]{٢ س+٩}} . ع س =$

$= \int (٢ س+٩)^{-\frac{١}{٥}} . ع س$

$= \frac{(٢ س+٩)^{\frac{٤}{٥}}}{\frac{٤}{٥}\times٢} + ث$

$= \frac{٥}{٨}(٢ س+٩)^{\frac{٤}{٥}} + ث$

٩. $\int (جا ٢س + جتا س) . ع س =$

$= -\frac{١}{٢} جتا ٢س + جا س + ث$

١٠. $\int (جتا^{٢} س + جا س) . ع س$

$= \int [\frac{١}{٢}(١+ جتا ٢س) + جا س] . ع س$

$= \frac{١}{٢} س + \frac{١}{٤} جا٢س - جتا س + ث$

١١. $\int (جا س + جتا س)^{٢} . ع س$

$= \int جا^{٢} س + جتا^{٢} س + ٢جاس جتاس) . ع س$

$= \int (١ + جا٢س) . ع س$

$= س - \frac{١}{٢} جتا٢س + ث$

١٢. $\int س^{١٠}(\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س^{٢}})^{٥} . ع س$

$= \int (٢ س+٣)^{٥} . ع س = \frac{(٢ س+٣)^{٦}}{١٢} + ث$

١٣. $\int \frac{س^{٢} + س - ٢}{س - ١} . ع س$

$= \int \frac{(س+٢)(س-١)}{(س-١)} . ع س$

= $\int (س + ٢) . ع س = \frac{١}{٢} س^{٢} + ٢ س + ث$

١٤. $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} . ع س$

= $\int \frac{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}{(س-٣)} . ع س$

= $\int (س^{٢} + ٣س + ٩) . ع س$

= $\frac{١}{٣} س^{٣} + \frac{٣}{٢} س^{٢} + ٩س + ث$

١٥. $\int (٣س^{٢} - ٢)(٢ س + ٥) . ع س$

= $\int (٦س^{٣} + ١٥س^{٢} - ٤س - ١٠) . ع س$

= $\frac{٣}{٢} س^{٤} + ٥س^{٣} - ٢س^{٢} - ١٠س + ث$

١٦. $\int$ جا س جتا س . ع س

= $\frac{١}{٢} \int ٢ \times$ جا س جتا س . ع س

= $\frac{١}{٢} \int$ جا ٢س . ع س = $-\frac{١}{٤}$ جتا ٢س + ث

١٧. $\int \frac{جتا^{٢} س}{١ + جا س} . ع س$

= $\int \frac{(١ - جا^{٢} س)}{١ + جا س} . ع س$

= $\int \frac{(١ - جا س)(١ + جا س)}{١ + جا س} . ع س$

= $\int (١ - جا س) . ع س = س + جتا س + ث$

١٨. $\int س \sqrt[٣]{\frac{٦}{س^{٢}} + \frac{٥}{س^{٣}}} . ع س$

= $\int \sqrt[٣]{٦ س + ٥} . ع س = \int (٦ س + ٥)^{\frac{١}{٣}} . ع س$

= $\frac{١}{٨} (٦ س + ٥)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

١٩. $\int$ جتا$(\frac{س}{٢} + ٣) . ع س$

= ٢ جا $(\frac{س}{٢} + ٣) + ث$

٢٠. $\int (س + ١)(٢س + ١)^{٩} . ع س$

= $\frac{١}{٢} \int (٢س + ٢)(٢س + ١)^{٩} . ع س$

= $\frac{١}{٢} \int (٢س + ١ + ١)(٢س + ١)^{٩} . ع س$

= $\frac{١}{٢} \int [(٢س + ١)^{١٠} + (٢س + ١)^{٩}] . ع س$

= $\frac{(٢ س + ١)^{١١}}{٤٤} + \frac{(٢ س + ١)^{١٠}}{٤٠} + ث$

٢١. $\int \frac{٢س + ٣}{(٢س + ١)^{٣}} . ع س$

= $\int \frac{٢س + ١ + ٢}{(٢س + ١)^{٣}} . ع س$

= $\int (\frac{٢س + ١}{(٢س + ١)^{٣}} + \frac{٢}{(٢س + ١)^{٣}}) . ع س$

= $\int [(٢س + ١)^{-٢} + ٢(٢س + ١)^{-٣}] . ع س$

= $\frac{(٢س + ١)^{-١}}{-٢} + \frac{(٢س + ١)^{-٢}}{-٢} + ث$

٢٢. $\int ٣س \sqrt[٣]{٣ س + ١} . ع س$

= $\int (٣س + ١ - ١) \sqrt[٣]{٣ س + ١} . ع س$

= $\int (٣ س + ١) \sqrt[٣]{٣ س + ١} . ع س$

= $-\int \sqrt[٣]{٣ س + ١} . ع س =$

= $\int (٣ س + ١)^{\frac{٤}{٣}} . ع س - \int (٣ س + ١)^{\frac{١}{٣}} . ع س$

= $\frac{(٣س + ١)^{\frac{٧}{٣}}}{٣ \times \frac{٧}{٣}} - \frac{(٣س + ١)^{\frac{٤}{٣}}}{٣ \times \frac{٤}{٣}} + ث$

= $\frac{١}{٧} (٣س + ١)^{\frac{٧}{٣}} - \frac{١}{٤} (٣س + ١)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

٢٣. $\int \sqrt[٥]{٢٥ س^{٢} - ٣٠ س + ٩} . ع س$

= $\int \sqrt[٥]{(٥س - ٣)^{٢}} . ع س$

= $\int (٥ س - ٣)^{\frac{٢}{٥}} . ع س$

= $\frac{(٥ س - ٣)^{\frac{٧}{٥}}}{٥ \times \frac{٧}{٥}} + ث = \frac{١}{٧} (٥ س - ٣)^{\frac{٧}{٥}} + ث$

٢٤. $\int \frac{س^{٢} - ٦ س}{(س - ٣)^{٤}} . ع س$

= $\int \frac{س^{٢} - ٦ س - ٩ + ٩}{(س - ٣)^{٤}} . ع س$

$= \int \frac{(س - ٣)^{٢} - ٩}{(س - ٣)^{٤}} \, . \, ع \, س$

$= \int [\frac{(س - ٣)^{٢}}{(س - ٣)^{٤}} - \frac{٩}{(س - ٣)^{٤}}] \, . \, ع \, س$

$= \int [(س - ٣)^{-٢} - ٩(س - ٣)^{-٤}] \, . \, ع \, س$

$= -(س - ٣)^{-١} + ٣(س - ٣)^{-٣} + ث$

$= \frac{-١}{(س - ٣)} + \frac{٣}{(س - ٣)^{٣}}$

٢٥. $\int$ قا$^{٢}(\frac{س}{٢} - ٣) \, . \, ع \, س$

$= ٢ظا(\frac{س}{٢} - ٣) + ث$

٢٦. $\int س \sqrt[٣]{٣س - ١} \, . \, ع \, س$

$= \frac{١}{٣} \int ٣س \sqrt[٣]{٣س - ١} \, . \, ع \, س$

$= \frac{١}{٣} \int (٣س - ١ + ١) \sqrt[٣]{٣س - ١} \, . \, ع \, س$

$= \frac{١}{٣} \int [(٣س - ١)^{\frac{٤}{٣}} + (٣س - ١)^{\frac{١}{٣}}] \, . \, ع \, س$

$= \frac{١}{٣} [\frac{(٣س - ١)^{\frac{٧}{٣}}}{٧} + \frac{(٣س - ١)^{\frac{٤}{٣}}}{٤}] + ث$

$= [\frac{(٣س - ١)^{\frac{٧}{٣}}}{٢١} + \frac{(٣س - ١)^{\frac{٤}{٣}}}{١٢}] + ث$

٢٧. $\int$ قا$^{٢}\frac{ط}{٢} \, . \, ع \, س = (ظا\frac{ط}{٢}) \, س + ث$

.....

(٣) د(س) $= \frac{س^{٢} + س}{|س + ١|}$

د(س) $= \begin{cases} \frac{س^{٢} + س}{(س + ١)} & ، \ س > -١ \\ \frac{س^{٢} + س}{-(س + ١)} & ، \ س < -١ \end{cases}$

د(-١$^{+}$) $= \lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} + س}{(س + ١)} =$

$= \lim_{س \to -١} س = -١$

د(-١$^{-}$) $= \lim_{س \to -١} \frac{س^{٢} + س}{-(س + ١)} =$

$= \lim_{س \to -١} (-س) = ١$

د(-١$^{+}$) $\neq$ د(-١$^{-}$)

$\lim_{س \to -١}$ د(س) غير موجودة

.....

(٤)

د(١$^{+}$) $= \lim_{س \to ١} ظا(\frac{ط س}{٤}) = ظا\frac{ط}{٤} = ١$

د(١$^{-}$) $= \lim_{س \to ١} \frac{جا(س - ١)}{(س - ١)} =$

$\lim_{ص \to ٠} \frac{جا ص}{ص} = ١$

د(١$^{+}$) = د(١$^{-}$) = ١ $\Leftarrow$ $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ١

.....

(٥) د(س) $=$

$\begin{cases} \frac{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س + ٢}}{س - ٢} & ، \ س \neq ٢ \\ ٣ & ، \ س = ٢ \end{cases}$

د (٢) = ٣

$\lim_{س \to ٢}$ د(س) $=$

$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{٣س - ٢} - \sqrt{س + ٢}}{س - ٢} \times$

$\frac{\sqrt{٣ س - ٢} + \sqrt{س + ٢}}{\sqrt{٣ س - ٢} + \sqrt{س + ٢}}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٣س - ٢) - (س + ٢)}{(س - ٢)[\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢}]}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(٢س - ٤)}{(س - ٢)[\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢}]}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{٢(س - ٢)}{(س - ٢)[\sqrt{٣س - ٢} + \sqrt{س + ٢}]}$

$= \frac{٢}{٢ + ٢} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \lim_{س \to ٢}$ د(س) $= \frac{١}{٢} \neq$ د(٢)

$\therefore$ الدالة غير متصلة عند س = ٢

.....

(٦) د(س) $= \begin{cases} ٢س^{٢} - ١ & ، \ س \leq ٢ \\ س + ٥ & ، \ س > ٢ \end{cases}$

د(٢$^{+}$) = $\lim_{س \to ٢}$ (٢س^{٢} − ١) = ٧

د(٢$^{-}$) = $\lim_{س \to ٢}$ (س + ٥) = ٧

د(٢$^{+}$) = د(٢$^{-}$) = ٧

$\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٧ .....(١)

د(٢) = ٢ × ٢^{٢} − ١ = ٧ .....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$\lim_{س \to ٢}$ د(س) = د(٢)

∴ الدالة متصلة عند س = ٢

د$'$(٢$^{+}$) = $\lim_{هـ \to ٠^{+}}$ $\frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$

د(٢) = ٧

د(٢+هـ) = ٢(٢+هـ)^{٢} − ١

= ٧ + ٨هـ + هـ^{٢}

د$'$(٢$^{+}$) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{٧ + ٨ هـ - هـ^{٢} - ٧}{هـ}$ =

$\lim_{هـ \to ٠}$ (٨ + هـ) = ٨

د$'$(٢$^{-}$) = $\lim_{هـ \to ٠^{-}}$ $\frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ}$

د(٢ + هـ) = ٢ + هـ + ٥ = ٧ + هـ

د$'$(٢$^{-}$) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{٧ + هـ - ٧}{هـ}$ = ١

د$'$(٢$^{+}$) ≠ د$'$(٢$^{-}$)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

.....

(٧) د(س) = $\begin{cases} س + ١ & ، \ س > ١ \\ ٣ - أ س^{٢} & ، \ س \leq ١ \end{cases}$

∵ الدالة متصلة عند س = ١

∴ د$'$(١$^{+}$) ≠ د$'$(١$^{-}$)

$\lim_{س \to ١}$ (٣ − أ س^{٢}) = $\lim_{س \to ١}$ (س+ ١)

٣ − أ = ٢ ⇐ أ = ١

∴ د(س) = $\begin{cases} س + ١ & ، \ س > ١ \\ ٣ - س^{٢} & ، \ س \leq ١ \end{cases}$

ثم نكمل الحل

.....

(٨) د(س) = $\begin{cases} أ س + ب & ، \ س \leq ٢ \\ س^{٢} & ، \ س > ٢ \end{cases}$

∵ قابلة للاشتقاق عند س = ٢

∴ فهي متصلة عند س = ٢

د(٢$^{+}$) = د(٢$^{-}$)

$\lim_{س \to ٢}$ (أ س + ب) = $\lim_{س \to ٢}$ س^{٢}

٢ أ + ب = ٤ ..... (١)

د$'$(س) = $\begin{cases} أ & ، \ س > ٢ \\ ٢ س & ، \ س < ٢ \end{cases}$

∵ قابلة للاشتقاق عند س = ٢

د$'$(٢$^{+}$) ≠ د$'$(٢$^{-}$)

أ = ٢ × ٢ = ٤ ⇐ أ = ٤

بالتعويض في (١) ⇐ ب = − ٤

.....

(٩) د(س) = $\begin{cases} أ س^{٢} + ب س + جـ & ، \ س \leq ٠ \\ ٢ س + ٥ & ، \ س > ٠ \end{cases}$

د$'$(س) = $\begin{cases} ٢ أ س + ب & ، \ س \leq ٠ \\ ٢ & ، \ س > ٠ \end{cases}$

د$''$(س) = $\begin{cases} ٢ أ & ، \ س \leq ٠ \\ صفر & ، \ س > ٠ \end{cases}$

الدالة قابلة للاشتقاق مرتين

د$''$(٠$^{+}$) = د$''$(٠$^{-}$)

٢ أ = ٠ ⇐ أ = ٠

د$'$(٠$^{+}$) = د$'$(٠$^{-}$) ⇐ ب = ٢

الدالة قابلة للاشتقاق ⇐ الدالة متصلة

د(٠$^{+}$) = د(٠$^{-}$) ⇐ جـ = ٥

.....

(١٠) س^{٢} + ص^{٢} + ٢س − ٢ص − ٦ = ٠

$\frac{ع}{ع س}$ (س^{٢} + ص^{٢} + ٢س − ٢ص − ٦)

٢س + ٢ص $\frac{ع ص}{ع س}$ + ٢ − ٢ $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٠

(٢ص − ٢) $\frac{ع ص}{ع س}$ = − ٢س − ٢

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{- ٢ س - ٢}{٢ ص - ٢}$

عند النقطة (١ ، − ١)

$\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{- ٢ \times ١ + ٢}{٢ \times - ١ - ٢}$ = ١

ميل المماس = ١

ظاهـ = ١ ⇐ هـ = ٤٥°

.....

(١١) ٢ ص^{٣} = ٣ س^{٢}

بإجراء اشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

٦ص $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ = ٦ س بالقسمة على ٦

ص $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ = س

ص $\times \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + \frac{ء ص}{ء س} \times$ ٢ص $\frac{ء ص}{ء س}$ = ١

ص $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ + ٢ص $(\frac{ء ص}{ء س})^٢$ = ١

بالقسمة على ص

ص $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ + ٢ $(\frac{ء ص}{ء س})^٢ = \frac{١}{ص}$

.....

(١٢) ص = س^٢ + ٣س + ٢

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ س + ٣ ..... (١)

ع = ٣س^٢ – ٥س + ٤

$\frac{ء ع}{ء س}$ = ٦ س – ٥ ..... (٢)

$\frac{ء ص}{ء ع} = \frac{ء ص}{ء س} \cdot \frac{ء س}{ء ع}$ ..... (٣)

بالتعويض من (١) ، (٢) في (٣)

$\frac{ء ص}{ء ع} = \frac{٢ س + ٣}{٦ س - ٥}$ ..... (٤)

$\frac{ء^٢ ص}{ء ع^٢} = \frac{ء}{ء ع} (\frac{ء ص}{ء ع}) = \frac{ء}{ء س} (\frac{ء ص}{ء ع}) \times \frac{ء س}{ء ع}$

$= \frac{(٦س-٥)\times٢ - (٢س+٣)\times٦}{(٦س - ٥)^٢} \times \frac{١}{٦س-٥}$

$= \frac{-٢٨}{(٦س - ٥)^٣}$

عند س = ٢ $\frac{ء^٢ ص}{ء ع^٢} = \frac{-٢٨}{٣٤٣} = \frac{-٤}{٤٩}$

.....

(١٣) $\frac{ء^٢ ع}{ء ص^٢} = \frac{ء}{ء ص} (\frac{ء ع}{ء ص})$ ..... (١)

$\frac{ء ع}{ء ص} = \frac{ء ع}{ء س} \times \frac{ء س}{ء ص}$

$= (٢س - ٣)(\frac{١}{س^٢ + ١}) = \frac{٢س - ٣}{س^٢ + ١}$

بالتعويض فى (١)

$\frac{ء^٢ ع}{ء ص^٢} = \frac{ء}{ء ص} (\frac{٢س - ٣}{س^٢ + ١})$

$= \frac{ء}{ء س} (\frac{٢س - ٣}{س^٢ + ١}) \times \frac{ء س}{ء ص} =$

$\frac{(س^٢ + ١) \times ٢ - (٢س - ٣) \times ٢س}{(س^٢ + ١)^٢} \times \frac{١}{س^٢ + ١}$

$= \frac{-٢س^٢ + ٦س + ٢}{(س^٢ + ١)^٣} = \frac{-٢(١)^٢ + ٦\times١ + ٢}{[(١)^٢ + ١]^٣} = \frac{٣}{٤}$

.....

(١٤) ص= جا٢س – جتا٤س .....(١)

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ جتا٢س + ٤جا٤س

عند س = صفر

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢جتا ٠ +٤ جا ٠ = ٢

ميل المماس م = ٢

بالتعويض في (١) عن س = ٠

ص = جا ٠ – جتا ٠ = – ١

نقطة التماس = (٠ ، – ١)

معادلة المماس هي(ص – ص$_١$) = م (س – س$_١$)

ص + ١ = ٢ س ⇐ ٢س– ص– ١= ٠

ميل العمودي = $-\frac{١}{٢}$

معادلة العمودي ص + ١ = $-\frac{١}{٢}$ س

.....

(١٥) ص = س^٣ – ٣ س ..... (١)

ص$'$ = ٣س^٢ -٣

المماس يوازي محور السينات ص$'$ = ٠

٣س^٢ -٣ = ٠ ⇐ س^٢ -١ = ٠

س = $\pm$ ١ بالتعويض في (١)

عند س = ١ ⇐ ص = – ٢

عند س = – ١ ⇐ ص = ٢

النقط المطلوبة (١ ، – ٢) ، (– ١ ، ٢)

.....

(١٦) بالتعويض بالنقطة (١ ، ٦)

٦ = أ + ب ..... (١)

ص = أ س^٣ + ب س^٢

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣ أ س^٢ + ٢ ب س

عند النقطة (١ ، ٦)

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣ أ × (١)^٢ + ٢ ب ×١

ميل المماس = ٣ أ + ٢ ب ..... (٢)

معادلة المماس ١٣ س – ص – ٧ = ٠

ميل المماس= – $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

ميل المماس = ١٣ ..... (٣)

من (٢) ، (٣)

٣ أ + ٢ ب = ١٣ ..... (٤)

بحل المعادلتين (١) ، (٤) ينتج أن أ = ١ ، ب = ٥

.....

(١٧) ص = أ س^٣ + ب س ..... (١)

ص = جـ س^٢ – س ..... (٢)

بالتعويض بالنقطة (– ١ ، ٢) في (١)

– أ – ب = ٢

أ + ب = – ٢ ..... (٣)

بالتعويض بالنقطة (-١ ، ٢) في (٢)

٢ = جـ + ١ ⟹ جـ = ١

من (١) $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣ أ س٢ + ب

عند النقطة (- ١ ، ٢)

ميل المماس م = ٣ أ + ب ..... (٤)

من (٢) $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٢ جـ س – ١

عند النقطة (- ١ ، ٢)

ميل المماس م = - ٢جـ - ١ = -٢×١-١

ميل المماس م = - ٣ ..... (٥)

من (٤) ، (٥) ٣ أ + ب = - ٣ ..... (٦)

بحل المعادلتين (٣)، (٦) ينتج أن أ = $-\frac{١}{٢}$ ، ب = $-\frac{٣}{٢}$

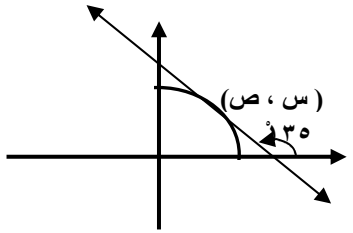
معادلة المماس ص- ص١ = م (س- س١)

ص – ٢ = - ٣ (س + ١)

ص – ٢ = - ٣س -٣ ومنها ٣س + ص + ١ = ٠

.....

(١٨) دور أول ٢٠٠٦



ميل المماس م = ظا ١٣٥° = - ١ ... (١)

س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠ ..... (٢)

٢ س + ٢ ص $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٠ ..... (٣)

بالتعويض من (١) في (٣) ينتج أن ٢س – ٢ص = ٠

س = ص ..... (٤)

بحل المعادلتين (٢) ، (٤)

س^{٢} + س^{٢} = ٥٠ ⟹ س = ٥

بالتعويض في (٤) ص = ٥

نقطة التماس = (٥ ، ٥)

معادلة المماس ص – ص١ = م (س – س١)

ص – ٥ = - ١ (س – ٥) ومنها س + ص = ١٠

.....

(١٩) $\frac{ع س}{ع ن}$ = $\frac{ع ص}{ع ن}$ معطى والمطلوب: (س ، ص)

س ص = س + ص – ٥ ..... (١)

باجراء الاشتقاق بالنسبة لـ ن

س $\frac{ع ص}{ع ن}$ + ص $\frac{ع س}{ع ن}$ = $\frac{ع س}{ع ن}$ + $\frac{ع ص}{ع ن}$

س $\frac{ع س}{ع ن}$ + ص $\frac{ع س}{ع ن}$ = $\frac{ع س}{ع ن}$ + $\frac{ع س}{ع ن}$

بالقسمة على $\frac{ع س}{ع ن}$ س + ص = ١ + ١

س + ص = ٢

س = ٢ – ص .....(٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

(٢- ص) ص = ٢ – ص – ص – ٥

٢ ص – ص^{٢} = - ٣ × - ١

ص^{٢} – ٢ ص – ٣ = ٠

(ص – ٣) (ص + ١) = ٠

ص = ٣ أ ، ص = - ١

بالتعويض في (٢)

عند ص = ٣ ⟹ س = - ١

عند ص = - ١ ⟹ س = ٣

النقطة (-١ ، ٣) أو (٣ ، -١)

.....

(٢٠) س^{٢} + ص^{٢} +٦س–٢٥=٠ ....(١)

٢س $\frac{ع س}{ع ن}$ +٢ص $\frac{ع ص}{ع ن}$ + ٦ $\frac{ع س}{ع ن}$ = ٠

..... (٢)

عند بداية الحركة

س = ٢ ، ص = -٣ ، $\frac{ع س}{ع ن}$ = ٦

بالتعويض في (٢)

٢×٢ × ٦ + ٢× - ٣× $\frac{ع ص}{ع ن}$ + ٦ × ٦ = ٠

- ٦ $\frac{ع ص}{ع ن}$ = - ٦٠ ⟹ $\frac{ع ص}{ع ن}$ = ١٠سم/ث

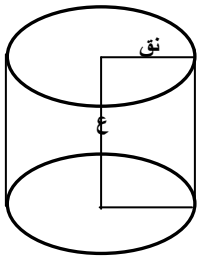
.....

(٢١) متروك للطالب

.....

(٢٢) $\frac{ع نق}{ع ن}$=٠,٢ سم/ث ، $\frac{ع ع}{ع ن}$=٠,١سم/ث ، $\frac{ع ح}{ع ن}$ = ؟

نق = ٢ ، ع = ٥سم



ح = ط نق^{٢} ع

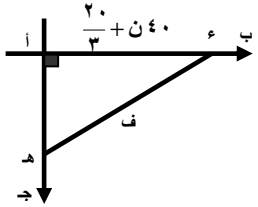
$\frac{ع ح}{ع ن}$ = ط (نق^{٢} $\frac{ع ع}{ع ن}$ + ع × ٢نق $\frac{ع نق}{ع ن}$)

= ط (٤×٠,١ + ٢×٢×٥×٠,٢)

$\frac{ع ح}{ع ن}$ = ٤,٤ ط سم^{٣} / ث

.....

(٢٣) دور ثان ٢٠٠٦



المسافة التي تحركتها السيارة الأولى قبل تحرك السيارة الثانية = ٤٠× $\frac{١٠}{٦٠}$ = $\frac{٢٠}{٣}$ كم

نفرض أن السيارتان تحركتا معا زمن = ن ساعة

فتكون المسافة التي تحركتها السيارة الأولى من بدء الحركة = أ ء حيث أ ء = ٤٠ن + $\frac{٢٠}{٣}$

مسافة تحرك السيارة الثانية أ هـ = ٦٠ ن

البعد بين السيارتين ء هـ = ف

ف^{٢} = (أ ء)^{٢} + (أ هـ)^{٢}

ف^{٢} = (٤٠ن + $\frac{٢٠}{٣}$)^{٢} + (٦٠ ن)^{٢} ... (١)

ف^{٢} = ٥٢٠٠ ن^{٢} + $\frac{١٦٠٠}{٣}$ ن + $\frac{٤٠٠}{٩}$

٢ف $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ١٠٤٠٠ن + $\frac{١٦٠٠}{٣}$ ... (٢)

السيارتان تحركتا معا زمن= $\frac{٢٠}{٦٠}$ = $\frac{١}{٣}$ ساعة

بالتعويض في (١) عن ن = $\frac{١}{٣}$

ف^{٢} = ٨٠٠ ⟸ ف=٢٠$\sqrt{٢}$

بالتعويض في(٢) ن = $\frac{١}{٣}$ ، ف=٢٠$\sqrt{٢}$

٤٠$\sqrt{٢}$ $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ١٠٤٠٠×$\frac{١}{٣}$ + $\frac{١٦٠٠}{٣}$

٤٠$\sqrt{٢}$ $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ٤٠٠٠ ومنها $\frac{ء ف}{ء ن}$ = ٥٠$\sqrt{٢}$ كم/س

.....

(٢٤) متروك للطالب

.....

(٢٥) المطلوب هو $\frac{ء}{ء ن}$ (ص$^{/}$)

الحل : ص = ٤س – ٢س^{٣}

ص$^{/}$ = ٤– ٦س^{٢}

$\frac{ء}{ء ن}$ (ص$^{/}$) = $\frac{ء}{ء ن}$ (٤– ٦س^{٢})

= – ١٢س $\frac{ء س}{ء ن}$ ..... (١)

ص = ٤س – ٢س^{٣}

$\frac{ء ص}{ء ن}$ = (٤ – ٦س^{٢}) $\frac{ء س}{ء ن}$

– ٥ = (٤ – ٦ × ٤) $\frac{ء س}{ء ن}$

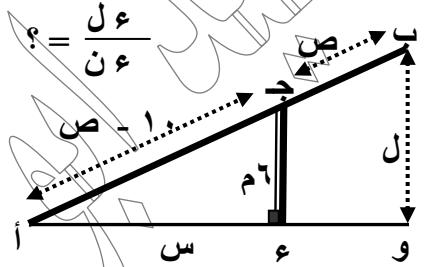
$\frac{ء س}{ء ن}$ = $\frac{١}{٤}$ بالتعويض فى (١)

$\frac{ء}{ء ن}$ (ص$^{/}$) = – ١٢س $\frac{ء س}{ء ن}$

= – ١٢ × ٢ × $\frac{١}{٤}$ = – ٦

.....

(٢٦)



فى المثلث أ ء جـ

س^{٢} + ٣٦ = (١٠ – ص)^{٢} .....(١)

س^{٢} + ٣٦ = ١٠٠ – ٢٠ص + ص^{٢}

٢س $\frac{ء س}{ء ن}$ = – ٢٠ $\frac{ء ص}{ء ن}$ + ٢ص $\frac{ء ص}{ء ن}$ ..... (٢)

عندما يصل الطرف ب إلى حافة الحائط

ص = ٠ بالتعويض فى(١) ينتج أن س = ٨ ،

بالتعويض فى(٢) $\frac{ء س}{ء ن}$ = ١,٥ ، س = ٨ ، ص = ٠

٢ × ٨ × ١,٥ = – ٢٠ $\frac{ء ص}{ء ن}$ ومنها $\frac{ء ص}{ء ن}$ = – ١,٢

من تشابه المثلثين أ ء جـ ، أ و ب

$\frac{٦}{ل}$ = $\frac{١٠ - ص}{١٠}$

ل = $\frac{٦٠}{١٠ - ص}$ = ٦٠ (١٠ – ص)$^{-١}$

$\frac{ء ل}{ء ن}$ = – ٦٠ (١٠ – ص)$^{-٢}$ × – ١ × $\frac{ء ص}{ء ن}$

$\frac{ء ل}{ء ن}$ = ٦٠(١٠ – ص)$^{-٢}$ × $\frac{ء ص}{ء ن}$

= ٦٠(١٠)$^{-٢}$ × – ١,٢ = – ٠,٧٢م/دقيقة

.....

(٢٧) ص = س^{٣} – ١٢ س ..... (١)

ص$^{/}$ = ٣س^{٢} – ١٢

إيجاد النقاط الحرجة للدالة

ص$^{/}$ = ٠ ⟸ ٣ س^{٢} – ١٢ = ٠

س^{٢} – ٤ = ٠ ⟸ س = ± ٢

بالتعويض في (١)

د(٢) = ٨ – ٢٤ = – ١٦

د(-٢) = – ٨ + ٢٤ = ١٦

د(-١) = – ١ + ١٢ = ١١

د(٤) = ٦٤ – ٤٨ = ١٦

القيمة العظمى المطلقة هي ١٦

القيمة الصغرى المطلقة هي – ١٦

.....

(٢٨) د(س) = س^{٣} – ٣ س + ٢ ..... (١)

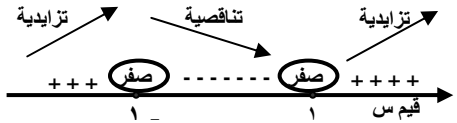
د$^{/}$(س) = ٣س^{٢} – ٣

د$^{//}$(س) = ٦ س

دراسة إشارة الدالة د$^{/}$(س)

د$^{/}$(س) = ٠ ⟸ ٣س^{٢} – ٣ = ٠

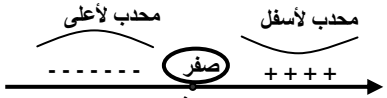
س = ± ١



في الفترة]-١ ، ١[الدالة تناقصية حيث د/(س) < ٠
في كل من الفترتين]-∞،-١[،]١ ، ∞[
الدالة تزايدية حيث د/(س) > ٠
د(-١) = (-١)^{٣} -٣×(-١) + ٢ = ٤
النقطة (-١ ، ٤) عظمى محلية
د(١) = (١)^{٣} -٣ × ١ + ٢ = صفر
النقطة (١ ، ٠) صغرى محلية

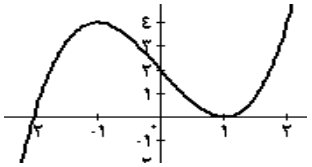
دراسة إشارة د//(س)

د//(س) = ٠ ⟸ س = ٠

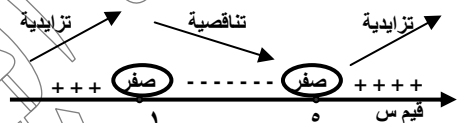


في الفترة]-∞ ، ٠[
د//(س) > ٠ ⟸ المنحنى محدب لأسفل
في الفترة]٠ ، ∞ [
د//(س) < ٠ ⟸ المنحنى محدب لأعلى
د(٠) = ٢ ⟸ (٠ ، ٢) نقطة انقلاب

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٠	٤	٢	٠	٤

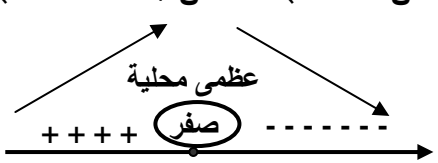


(٢٩) ∵ (٣ ، -٩) ∋ للمنحنى
∴ فهي تحقق معادلته
-٩ = ٢٧ + ٩ أ + ٣ ب
٣أ + ب = -١٢ ..... (١)
ص= س^{٣} + أ س^{٢} + ب س
ص/ = ٣س^{٢} + ٢ أ س + ب
ص// = ٦ س + ٢ أ ..... (٢)
عند نقطة الانقلاب (٣ ، -٩)
ص// = ٠ ، س = ٣
بالتعويض في (٢)
٠ = ١٨ + ٢ أ ⟸ أ = -٩
بالتعويض في (١)
-٢٧ + ب = -١٢ ⟸ ب = ١٥
∴ معادلة المنحنى هي
ص = س^{٣} – ٩ س^{٢} + ١٥ س
ص/ = ٣ س^{٢} – ١٨ س + ١٥
ص/ = ٠ ⟸ ٣س^{٢} – ١٨س+ ١٥=٠
س^{٢} – ٦ س + ٥ = ٠
(س – ٥) (س – ١) = ٠ ومنها س = ٥ ، س = ١



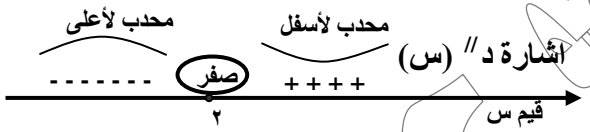
د(١) =(١)^{٣} – ٩×(١)^{٢} + ١٥× ١=٧
∴ (١ ، ٧) نقطة عظمى محلية
د(٥)=١٢٥– ٩ ×٢٥+ ١٥×٥ = -٢٥
∴ (٥ ، -٢٥) نقطة صغرى محلية

(٣٠) ∵ بالتعويض بالنقطة (١ ، ٤)
٤ = أ + ب + ٢
أ + ب = ٢ ..... (١)
د(س) = أ س^{٢} + ب س + ٢
د/(س) = ٢ أ س + ب
عند النقطة الحرجة (١ ، ٤)
د/(س) = ٠ ، س = ١
٠ = ٢ أ س + ب
ب = -٢ أ ..... (٢)
بالتعويض من (٢) في (١)
أ – ٢ أ = ٢ ⟸ أ = -٢
بالتعويض في (٢) ⟸ ب = ٤
معادلة المنحنى هي
ص = -٢س^{٢} + ٤ س + ٢
ص/ = -٤س + ٤
ص/ = ٠ ⟸ -٤س + ٤ = ٠ ⟸ س=١



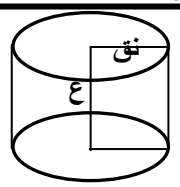
∴ (١ ، ٤) نقطة عظمى محلية

(٣١) (١) (جـ ، د(جـ)) صغرى محلية
(٢) د محدبة لأسفل في]٢ ، ∞ [
حيث د(س) = س (س – ٣)^{٢}
= س(س^{٢} – ٦س + ٩)
= س^{٣} – ٦س^{٢} + ٩س
د/(س) = ٣س^{٢} – ١٢س + ٩
د//(س) = ٦س – ١٢



الدالة محدبة لأسفل في الفترة]٢ ، ∞ [

(٣٢) حجم الاسطوانة = ط نق^{٢} ع



$٨٠٠٠ = ط نق^{٢} ع$

$ع = \frac{٨٠٠٠}{نق^{٢}}$ ..... (١)

مـ = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$مـ = ٢ ط نق ع + ط نق^{٢}$ ..... (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

$مـ = ٢ ط نق \times \frac{٨٠٠٠}{نق^{٢}} + ط نق^{٢}$

$مـ = ٠ \quad ١٦٠٠٠ ط نق^{-١} + ط نق^{٢}$

$\frac{ء مـ}{ء نق} = - ١٦٠٠٠ ط نق^{-٢} + ٢ ط نق$

$\frac{ء^{٢} مـ}{ء نق^{٢}} = + \frac{٣٢٠٠٠ ط}{نق^{٣}} + ٢ ط$ ..... (٢)

$\frac{ء مـ}{ء نق} = ٠ \quad - ١٦٠٠٠ ط نق^{-٢} + ٢ ط نق = ٠$

$- \frac{١٦٠٠٠ ط}{نق^{٢}} + ٢ ط نق = ٠$ بالضرب × $نق^{٢}$

$- ١٦٠٠٠ ط + ٢ ط نق^{٣} = ٠$

$٢ ط نق^{٣} = ١٦٠٠٠ ط$

$نق^{٣} = ٨٠٠٠ \Leftarrow$ نق = ٢٠ بالتعويض في (٢)

$\frac{ء^{٢} مـ}{ء نق^{٢}} = ٤ ط + ٢ ط = ٦ ط > ٠$

المساحة السطحية أقل ما يمكن

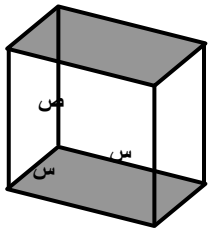
بالتعويض في (١) عن نق = ٢٠

$ع = \frac{٨٠٠٠}{٤٠٠} = ٢٠$

نق = ٢٠سم ، ع = ٢٠سم

.....

(٣٣) مجموع أطوال أحرفه = ١٢٠



٤ ص +٨ س = ١٢٠

ص + ٢ س = ٣٠

ص = ٣٠ – ٢ س ..... (١)

ح = مساحة القاعدة × الارتفاع

$ح = س^{٢} ص$ ..... (٢)

من (١) ، (٢)

$ح = س^{٢} (٣٠ – ٢ س)$

$ح(س) = ٣٠ س^{٢} – ٢ س^{٣}$

$ح /(س) = ٦٠ س – ٦ س^{٢}$

$ح //(س) = ٦٠ – ١٢ س$

$ح / = ٠ \quad ٦٠ س – ٦ س^{٢} = ٠$

٦ س (١٠ – س) = ٠

س = ٠ مرفوض ومنها س = ١٠

$ح //(١٠) = ٦٠ – ١٢ \times ١٠ = - ٦٠ < ٠$

ح أكبر ما يمكن عندما س = ١٠سم

ص = ٣٠ – ٢ × ١٠ = ١٠سم

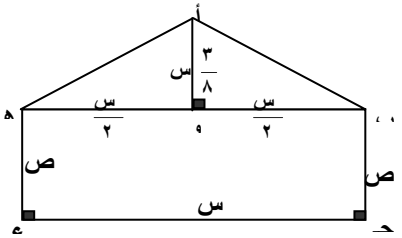
الأبعاد هي ١٠سم ، ١٠سم ، ١٠سم

.....

(٣٤) $أ ب = \sqrt{(\frac{٣س}{٨})^{٢} + (\frac{س}{٢})^{٢}}$

$أ ب = \sqrt{\frac{٩}{١٦} س^{٢} + \frac{س^{٢}}{٤}}$

$= \sqrt{\frac{٢٥}{٦٤} س^{٢}} = \frac{٥ س}{٨}$



محيط النافذة = ١٢٠ سم

ب جـ + جـ ء + ء هـ + هـ أ + أ ب = ١٢٠

$ص + س + ص + \frac{٥ س}{٨} + \frac{٥ س}{٨} = ١٢٠$

٨ص+٨س+٨ص+٥س+٥س = ٩٦٠

١٨ س + ١٦ ص = ٩٦٠

٩ س + ٨ ص = ٤٨٠

$ص = \frac{٤٨٠ - ٩ س}{٨}$ ..... (١)

مساحة النافذة = مساحة المستطيل + مساحة المثلث

$مـ = س ص + \frac{١}{٢} س \times \frac{٣}{٨} س$

$مـ = س ص + \frac{٣}{١٦} س^{٢}$ ..... (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

$مـ = س(\frac{٤٨٠ - ٩ س}{٨}) + \frac{٣}{١٦} س^{٢}$

$مـ = ٦٠ س - \frac{٩}{٨} س^{٢} + \frac{٣}{١٦} س^{٢}$

$مـ = ٦٠ س - \frac{١٥}{١٦} س^{٢}$

$مـ / = ٦٠ - \frac{١٥}{٨} س \Leftarrow مـ // = - \frac{١٥}{٨}$

$مـ / = ٠ \Leftarrow ٦٠ - \frac{١٥}{٨} س = ٠$

$س = \frac{٦٠ \times ٨}{١٥} = ٣٢$ سم

بالتعويض في (١) ص = ٢٤ سم

بعدي المستطيل هما ٣٢ سم ، ٢٤ سم

.....

(٣٥) م = $\frac{١٠^{٥}}{ع}$ + ١٠ ع ..... (١)

م = ١٠ ^{٥} ع $^{-١}$ + ١٠ ع

م$^{/}$ = - ١٠ ^{٥} ع $^{-٢}$ + ١٠

م$^{//}$ = + ٢ × ١٠ ^{٥} ع $^{-٣}$

م$^{//}$ = $\frac{٢ \times ١٠^{٥}}{ع^{٣}}$ ..... (٢)

م$^{/}$ = ٠ ومنها - ١٠ ^{٥} ع $^{-٢}$ + ١٠ = ٠

- $\frac{١٠^{٥}}{ع^{٢}}$ + ١٠ = ٠ بالضرب × ع^{٢}

- ١٠ ^{٥} + ١٠ ع^{٢} = ٠

ع^{٢} = ١٠ ^{٤} ⟸ ع = ١٠ ^{٢} = ١٠٠

بالتعويض في (٢)

م$^{//}$ (١٠٠) = $\frac{٢ \times ١٠^{٥}}{(١٠٠)^{٣}}$ = $\frac{٢}{١٠}$ > ٠

م أصغر ما يمكن عندما ع = ١٠٠

بالتعويض في (١)

م = $\frac{١٠^{٥}}{١٠٠}$ + ١٠ × ١٠٠ = ٢٠٠٠ث.كجم

.....

(٣٦) ٣ س – ص + ٣ = ٠

ص = ٣ س + ٣ ..... (١)

نفرض أن جـ = (س ، ص)

ف = (جـ أ)^{٢} + (جـ ب)^{٢}

المطلوب: جـ = (... ، ...) بحيث ف أصغر ما يمكن

أ = (٤ ، ٢) ، ب = (-١ ، -٣)

ف = (س– ٤)^{٢} + (ص-٢)^{٢} + (س+١)^{٢} + (ص+٣)^{٢} ..... (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

ف = (س-٤)^{٢} + (٣س+٣-٢)^{٢} + (س+١)^{٢} + (٣س+٣+٣)^{٢}

ف = (س-٤)^{٢} + (٣س+١)^{٢} + (س+١)^{٢} + (٣س+٦)^{٢}

ف = س^{٢} – ٨س + ١٦ + ٩س^{٢} + ٦س + ١ + س^{٢} + ٢س + ١ + ٩س^{٢} + ٣٦س + ٣٦

ف = ٢٠س^{٢} + ٣٦س + ٥٤

ف$^{/}$ = ٤٠س + ٣٦

ف$^{//}$ = ٤٠

ف$^{/}$ = ٠ ⟸ ٤٠س + ٣٦ = ٠

س = - ٠,٩

ف$^{//}$ (- ٠,٩) = ٤٠ > ٠

ف أصغر ما يمكن عندما س = - ٠,٩

بالتعويض في (١)

ص = ٣ × - ٠,٩ + ٣ = ٠,٣

جـ = (- ٠,٩ ، ٠,٣)

.....

(٣٧) ميل العمودي = $\frac{-١}{٣ س^{٢} + ٢ س}$

ميل المماس = ٣س^{٢} + ٢س

ص$^{/}$ = ٣س^{٢} + ٢س

ص = $\int$ (٣س^{٢} + ٢س).ء س

ص= س^{٣} + س^{٢} + ث ..... (١)

المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٠) نقطة الأصل

فهي تحقق معادلته

٠ = ٠ + ٠ + ث ث = ٠

معادلة المنحنى هي ص = س^{٣} + س^{٢}

.....

(٣٨) ص$^{//}$ = س^{٢} – ١

ص$^{/}$ = $\int$ (س^{٢} – ١) . ء س

ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – س + ث ..... (١)

معادلة المماس هي س + ١٢ص = جـ

بإجراء الاشتقاق بالنسبة لـ س

١ + ١٢ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ ⟸ $\frac{ء ص}{ء س}$ = - $\frac{١}{١٢}$

عند س = ١ $\frac{ء ص}{ء س}$ = - $\frac{١}{١٢}$

بالتعويض في (١)

- $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$ - ١ + ث ⟸ ث = $\frac{٧}{١٢}$

بالتعويض في (١)

ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – س + $\frac{٧}{١٢}$

ص = $\int$ ($\frac{١}{٣}$ س^{٣} – س + $\frac{٧}{١٢}$) . ء س

ص = $\frac{١}{١٢}$ س^{٤} – $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{٧}{١٢}$ س+ ث$^{/}$

المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ١)

فهي تحقق معادلته

١ = $\frac{١}{١٢}$ - $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٧}{١٢}$ + ث$^{/}$ ⟸ ث$^{/}$ = $\frac{٥}{٦}$

معادلة المنحنى هي

ص = $\frac{١}{١٢}$ س^{٤} – $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{٧}{١٢}$ س^{٢} + $\frac{٥}{٦}$

.....

(٣٩) ص$^{//}$ = ٦س – ٦

ص$^{/}$ = $\int$ (٦س – ٦) . ء س

ص$^{/}$ = ٣ س^{٢} – ٦س + ث ..... (١)

عند النقطة العظمى المحلية (-١ ، ١٠)

ص$^{/}$ = ٠ ، س = - ١ بالتعويض في(١)

٠ = ٣ + ٦ + ث ⟸ ث = ـ ٩

ص/ = ٣ س^{٢} ـ ٦س ـ ٩

ص = ∫ (٣ س^{٢} ـ ٦س ـ ٩) . ء س

ص = س^{٣} ـ ٣ س^{٢} ـ ٩ س+ ث/ .....(٢)

بالتعويض في (٢) بالنقطة (ـ١ ، ١٠)

١٠ = (ـ١)^{٣} ـ٣(ـ١)^{٢} ـ ٩ × ـ١ + ث/

ث/ = ٥ معادلة المنحنى هي

ص = س^{٣} ـ ٣ س^{٢} ـ ٩ س+ ٥

.....

(٤٠) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣س^{٢} ـ ٦س ـ ٩ ..... (١)

ص = ∫ (٣س^{٢} ـ ٦س ـ ٩) . ء س

ص = س^{٣} ـ ٣س^{٢} ـ ٩س + ث .... (٢)

$\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ٦ س ـ ٦ ..... (٣)

عند النقطة العظمى أو الصغرى المحلية

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ بالتعويض في (١)

٣س^{٢} ـ ٦س ـ ٩ = ٠

س^{٢} ـ ٢س ـ ٣ = ٠

(س ـ ٣) (س + ١) = ٠

س = ٣ س = ـ ١بالتعويض في (٣)

عند س = ٣ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ١٢ > ٠ صغرى محلية

عند س = ـ ١ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = ـ ١٢ < ٠ ظمى محلية

(ـ ١ ، ١٠) نقطة عظمى محلية

فهي تحقق معادلة المنحنى بالتعويض في (٢)

١٠ = ـ١ ـ٣ + ٩ + ث

٥ = ث بالتعويض في (٢)

معادلة المنحنى هي

ص= س^{٣} ـ٣س^{٢} ـ ٩س+ ٥ ..... (٤)

عند س = ٣ نقطة صغرى محلية

بالتعويض في (٤)

ص = ٢٧ ـ ٢٧ ـ ٢٧ + ٥

ص = ـ ٢٢

النقطة (٣ ، ـ٢٢) نقطة صغرى محلية

.....

(٤١) $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{٢ س - ٣}{٥ - ٢ ص}$

∫ (٥ ـ ٢ص).ء ص= ∫ (٢س ـ ٣).ء س

٥ص ـ ص^{٢} = س^{٢} ـ ٣س + ث .... (١)

بالتعويض بالنقطة (١ ، ٢) في (١)

١٠ ـ ٤ = ١ ـ ٣ + ث ث = ٨

معادلة المنحنى هي

٥ ص ـ ص^{٢} = س^{٢} ـ ٣ س + ٨

.....

(٤٢) $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{\sqrt{ص - ٣}}{\sqrt{س + ٢}}$

$\int \frac{ء ص}{\sqrt{ص - ٣}}$ = $\int \frac{ء س}{\sqrt{س + ٢}}$

∫ (ص ـ ٣)$^{-\frac{١}{٢}}$. ء ص = ∫ (س + ٢)$^{-\frac{١}{٢}}$. ء س

٢ (ص ـ ٣)$^{\frac{١}{٢}}$ = ٢ (س + ٢)$^{\frac{١}{٢}}$ + ث

بالتعويض بالنقطة (٢ ، ٤)

٢ = ٤ + ث ث = ـ ٢

المعادلة هى : (ص ـ ٣)$^{\frac{١}{٢}}$ = (س + ٢)$^{\frac{١}{٢}}$ ـ ١

.....

(٤٣) $\frac{ء ح}{ء ن}$ = (ن + ٢)

ح = ∫ (ن + ٢) . ء ن

ح = $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} + ٢ ن + ث

ن = ٠ ، ح = ٠ ⟸ ث = ٠

ح = $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} + ٢ ن

عندما يمتلئ الخزان ح = ٦

$\frac{١}{٢}$ ن^{٢} + ٢ ن = ٦ × ٢

ن^{٢} + ٤ ن ـ ١٢ = ٠

(ن + ٦) (ن ـ ٢) = ٠

ن = ـ ٦ مرفوض لأن الزمن موجب

ن = ٢ دقيقة

.....

(٤٤) $\frac{ء ح}{ء ن}$ = ٠,٤ ن ـ ٤٠

ح = ∫ (٠,٤ ن ـ ٤٠) . ء ن

ح = ٠,٢ ن^{٢} ـ ٤٠ ن + ث

عند ن = ٣٠ ح = ٩٨٠

٩٨٠ = ٠,٢ × ٣٠^{٢} ـ ٤٠ × ٣٠ + ث

ث = ٢٠٠٠

ح = ٠,٢ ن^{٢} ـ ٤٠ ن + ٢٠٠٠ ..... (١)

عند بداية تسرب السائل

ن = ٠ بالتعويض في (١)

ح = ٢٠٠٠ سم^{٣}

عندما يصبح الإناء فارغا

ح = ٠ بالتعويض في (١)

٠,٢ن^{٢} ـ ٤٠ن + ٢٠٠٠ = ٠ ÷ ٠,٢

ن^{٢} ـ ٢٠٠ن + ١٠٠٠٠ = ٠

(ن ـ ١٠٠)^{٢} = ٠ ومنها ن = ١٠٠ ثانية